Universitas
Darunnajah
Press

PENGANTAR

TEORI PELUANG

ANI NURAINI, M.PD
DEWI SUSANAWATI, M.M.
LAILATUL MAZIYAH WILDAN MUFARIDHO, M.AKTR

UNDANG-UNDANG REPUBLIK INDONESIA
NOMOR 28 TAHUN 2014 TENTANG HAK CIPTA

LINGKUP HAK CIPTA

Pasal 1

1. Hak Cipta adalah hak eksklusif pencipta yang timbul secara otomatis berdasarkan prinsip deklaratif setelah suatu ciptaan diwujudkan dalam bentuk nyata tanpa mengurangi pembatasan sesuai dengan ketentuan peraturan perundang-undangan.

KETENTUAN PIDANA

Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (l) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/ atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

Pengantar Teori Peluang

Hak Penerbitan pada UDN PRESS

ISBN: 978-634-04-1839-2

Penulis:
Ani Nuraini, M.Pd.
Dewi Susanawati, M.M
Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho, M.Aktr

Editor:
Falah Ibrahim W, M.Comm

Lay out
Falah Ibrahim W, M.Comm

Desain sampul:
Ani Nuraini, M.Pd

Cetakan I, Juli 2025

Penerbit
UDN PRESS

No. Anggota IKAPI : 633/Anggota Luar Biasa/DKI/2024
Jln. Ciledug Raya No. 01. Ulujami Raya, Pesanggrahan
Jakarta Selatan, Provinsi DKI Jakarta
Website: www.press.darunnajah.ac.id
Instagram: @udn_press

Kata Pengantar

Buku "Teori Peluang: Bahan Kuliah Mahasiswa" ini dirancang khusus sebagai panduan esensial bagi maahasiswa dalam memahami konsep inti teori peluang. Kami akan membahas secara komprehensif permutasi dan kombinasi sebagai fondasi perhitungan probabilitas, lengkap dengan definisi dan teorema yang mendasarinya.

Lebih lanjut, buku ini akan mengantarkan mahasiswa pada pemahaman peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu. Setiap konsep disajikan dengan definisi yang jelas, disertai teorema-teorema yang menopang struktur teoritisnya. Pemahaman ini krusial dalam analisis data dan inferensi statistika di berbagai disiplin ilmu.

Disusun dengan bahasa yang lugas, buku ini dilengkapi contoh-contoh dan latihan soal untuk menunjang perkuliahan mahasiswa. Kami berharap buku ini menjadi pegangan utama yang efektif dalam pembelajaran dan membantu mahasiswa menguasai dasar-dasar teori peluang.

Selamat belajar dan mendalami teori peluang!

Jakarta, 25 Juni 2025

Penulis

Daftar Isi

BAB 1

PERMUTASI

1.1. Pendahuluan

Dalam beberapa kasus, sering terjadi situasi yang melibatkan pengurutan, penyusunan, dan penempatan objek dalam berbagai cara. Misalnya, dalam menyusun jadwal perkuliahan, menempatkan peserta dalam sebuah lomba, atau mengatur tempat duduk dalam sebuah acara. Semua ini berkaitan erat dengan konsep *permutasi*, yaitu suatu cara untuk menyusun sekumpulan objek secara teratur dan berurutan.

Bayangkan sebuah panitia pemilihan ketua organisasi mahasiswa harus menentukan susunan tiga orang calon ketua dari tujuh kandidat yang tersedia. Setiap susunan akan menghasilkan hasil pemilihan yang berbeda karena posisi pertama, kedua, dan ketiga menunjukkan tingkat tanggung jawab yang berbeda. Pertanyaannya: **Berapa banyak susunan berbeda**

yang dapat dibentuk? Pertanyaan semacam ini adalah contoh nyata dari masalah permutasi.

Permutasi adalah konsep dasar dalam **matematika diskrit** yang mempelajari cara menyusun sekumpulan objek secara berurutan tanpa pengulangan atau dengan pengulangan. Permutasi diterapkan secara luas dalam bidang ilmu komputer, statistika murni dan terapan, teori peluang, logistik, hingga kriptografi. Dalam kehidupan sehari-hari pun, permasalahan permutasi muncul dalam penyusunan jadwal, penempatan posisi kerja, dan pengaturan sistem antrian.

1.2. Prinsip Dasar Perhitungan

Prinsip dasar perhitungan digunakan untuk memudahkan menghitung banyaknya kejadian-kejadian dalam suatu ruang sampel. Prinsip ini juga diperlukan sebagai dasar dari memahami pola perhitungan dalam kasus yang membutuhkan penyelesaian permutasi.

Definisi 1.1. (Aturan Penjumlahan)

Jika tindakan pertama dilakukan dengan n_1 cara, tindakan kedua dilakukan dengan n_2 cara dan seterusnya sampai tindakan ke-k dapat dilakukan dengan n_k cara, dimana semua tindakan tidak dapat dilakukan secara bersamaan, maka banyaknya cara untuk menyelesaikan tindakan-tindakan tersebut adalah $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cara.

Contoh 1.1.

Diketahui terdapat 6 buku materi Statistika dan 7 buku materi Aktuaria di dalam perpustakaan sebuah Universitas. Mahasiswa diperbolehkan meminjam kedua materi buku tersebut, maka terdapat 6+7=13 buku yang dapat dipilih untuk dipinjam oleh mahasiswa.

Definisi 1.2. (Aturan Perkalian)

Suatu prosedur dapat dibagi menjadi beberapa tahapan. Tahap awal dilakukan dengan n_1 cara, tahap berikutnya dilakukan dengan n_2 cara dan seterusnya hingga tahap akhir ke-k dapat dilakukan dengan n_k cara. Sehingga prosedur tersebut akan memperoleh $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ cara.

Contoh 1.2.

Seorang peneliti memiliki 4 jenis referensi metode penelitian: 4 referensi penelitian kuantitatif, 7 referensi penelitian kualitatif, 3 referensi penelitian eksperimen, dan 5 referensi penelitian campuran. Referensi yang ada dipelajari dengan tekun dalam waktu 1 tahun agar peneliti dapat menyelesaikan penelitiannya tepat waktu. Maka, ada $4 \times 7 \times 3 \times 5 = 420$ cara belajar bagi peneliti untuk menguasai metode penelitiannya.

peduli dengan urutannya. **Kombinasi** r objek dari n objek adalah proses memilih r objek dari n objek yang tersedia **tanpa memperhatikan urutannya.** Ditulis dengan simbol $C(n, r)$, atau nCr, atau C_r^n. Berikut merupakan contoh yang menggambarkan hubungan antara kombinasi dengan permutasi. Misalnya terdapat himpunan objek $\{a, b, c, d\}$, kemudian dipilih dan disusun sebanyak tiga-tiga 3 (unsur) untuk melihat perbedaan antara kombinasi dan permutasi.

Kombinasi $C(4,3)$	**Permutasi $P(4,3)$**
abc	abc acb bac bca cab cba
abd	abd adb bad bda dab dba
acd	acd adc cad cda dac dca
bcd	bcd bdc cbd cdb dbc dcb

Dari contoh di atas ddapat dilihat bahwa **setiap kombinasi memiliki jumlah permutasi yang sama.** Dalam contoh diberikan, jumlah kombinasi dikalikan dengan 6 menghasilkan jumlah permutasi, dimana angka 6 merupakan jumlah permutasi dari 3 unsur.

Permutasi dari 3 unsur adalah $3! = 6$ sedangkan.

$$3!\,C(4,3) = P(4,3)$$

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} = 4$$

Secara umum kombinasi r unsur dari n unsur yang diketahui dimana $r \leq n$ adalah:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

Atau

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Teorema

Misalkan n dan k bilangan bulat positif dengan $n \geq r$. Banyaknya kombinasi dari n objek yang diambil dari r objek adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Bentuk umum $\binom{n}{r}$ dapat juga dituliskan dalam bentuk $C(n,r)$, atau nCr

Perbedaan Kombinasi dan Permutasi

- Permutasi digunakan untuk menentukan barbagai susunan dari suatu kumpulan objek secara berurutan. Sebaliknya, kombinasi tanpa memperhatikan urutan, sehingga urutan tidak menjadi hal penting.
- Dalam permutasi, urutan, posisi, dan cara penempatan elemen sangat berpengaruh, sedangkan dalam kombinasi hal-hal tersebut tidak berpengaruh.
- Perubahan urutan dalam permutasi menghasilkan perbedaan makna sedangkan dalam kombinasi perubahan urutan tidak mengubah makna.

Contoh 2.1.

Misalkan kita memilih 2 unsur dari 3 unsur {A, B, C}. jika menggunakan permutasu (urutan penting) maka hasil susunannya AB, BA, AC, CA, BC, CB. Sedangkan jika menggunakan kombinasi (urutan tidak penting) maka hasil susunananya AB, CA, BC.

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

Jadi, banyaknya cara memilih 3 orang anggota tim olimpiade matematika adalah 20 cara.

2.1. Interpretasi Kombinasi

$C(n,r)$ adalah jumlah himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang memiliki n elemen.

Misalkan $A = \{1,2,3\}$

Jumlah himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l} \{1,2\} = \{2,1\} \\ \{1,3\} = \{3,1\} \\ \{2,3\} = \{3,2\} \end{array}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

Atau $C(3,2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ buah

$C(n,r)$ merupakan cara untuk memilih r elemen dari n elemen yang tersedia, dimana urutan pemilihannya tidak menjadi faktor penting dalam hasil akhir.

Contoh 2.5.

Diantara 10 mahasiswa matematika angkatan 2022, berapa banyak cara membentuk sebuah tim perwakilan yang terddiri dari 5 orang dengan ketentutuan berikut:

a) Mahasiswa bernama A harus selalu menjadi anggota tim.
b) Mahasiswa bernama A tidak boleh menjadi anggota tim.
c) Mahasiswa bernama A waji masuk tim, sedangkan B tidak boleh ikut.
d) Mahasiswa bernama B harus masuk tim, sedangkan A tidak bileh ikut.
e) Mahasiswa bernama A dan B keduanya harus masuk dalam tim.
f) Minimal salah satu dari mahasiswa yang bernama A atau B harus menjadi anggota tim

- Maka $X \cap Y$ adalg jumlah cara membentuk tim yang memuat keduanya, A dan B.

Sehingga:

$|X| = C(9,4) = 126;\ |Y| = C(9,4) = 126;$

$|X \cap Y| = C(8,3) = 56$

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$

2.2. Kombinasi dengan Pengulangan

Misal terdapat r buah bola yang semua warnya sama dan n buah kotak.

a. Jika setiap kotak hanya boleh diisi paling banyak satu bola, maka jumlah cara untuk menempatkan bola dalam kotak adalah: : $C(n, r)$.

b. Jika setiap kotak boleh menampung lebih dari satu bola (tanpa atasan jumlah bola dalam kotak), maka Jumlah cara untuk menempatkan bola ke dalam kotak adalah: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$

Contoh 2.6.

Diketahui persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

Dengan syarat setiap x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa banyak kemungkinan solusinya dari persamaan tersebut?

<u>Penyelesaian:</u>

- Analogi: membagi 12 bola ke dalam 4 kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).
- Misalnya salah satu cara pembagian adalah:

  Kotak 1 diisi 3 bola ($x_1 = 3$)

  Kotak 2 diisi 5 bola ($x_2 = 5$)

  Kotak 3 diisi 2 bola ($x_3 = 2$)

  Kotak 4 diisi 2 bola ($x_4 = 2$)

Jumlah bola tetap:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$$

Jadi $C(4 + 12 - 1, 12) = C(15,12) = 455$ buah solusi untuk persamaan tersebut.

Contoh 2.7.

Terdapat 20 buah apel dan 15 buah jeruk yang akan dibagikan kepada 5 orang anak, setiap anak boleh menerima lebih dari satu buah apel atau jeruk, atau tidak menerima sama sekali. Berapa banyak cara pembagian yang dapat dilakukan?

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui:

Jumlah anak $n = 5$

Jumlah apel $r_1 = 20$

Jumlah jeruk $r_2 = 15$

Pembagian 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1{,}20)$ cara.

pembagian 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1{,}15)$ cara.

Banyak cara pembagian apel dan jeruk secara bersamaan adalah:

$C(5 + 20 - 1{,}20) \times C(5 + 15 - 1{,}15)$

$= C(24{,}20) \times C(19{,}15)$

2.3. Teorema Binomial Newton

Teorema binomial memanfaatkan prinsip kombinasi $C(n, r)$ untuk menentukan koefisien dari suku-suku dalam ekspresi binomial yang diperluas denga cara efisien. Koefisien binomial sendiri merupakan dasar dari banyak masalah perhitungan kombinasi.

Teorema ini menyediakan cara sistematis untuk memperluas ekspresi binomial yang dipangkatkan, untuk menjelaskan bagaimana menjabarkan bentuk $(a + b)^n$, dimana a dan b adalah variabel (atau bilangan riil) dan n adalah bilangan asli (eksponen). Bentuk umum dari teorema ini dinyatakan sebagai berikut:

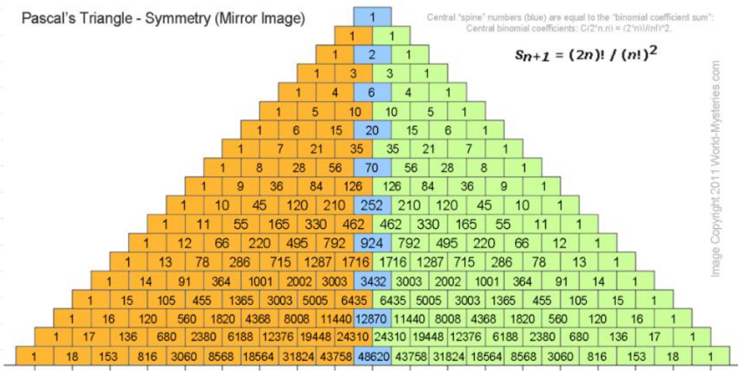
$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Rumus tersebut berlaku untuk semua bilangan riil maupun kompleks a dan b, serta semua bilangan

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

$$+ \cdots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

Koefisien untuk $a^{n-r}b^r$ adalah $\binom{n}{r}$. Bilangan $\binom{n}{r}$ disebut **koefisien binomial**. Nilai-nilai koefisien tersebut dapat ditemukan langsung dalam segitiga pascal.



Gambar 2.1. Segitiga Pascal

Contoh 2.8.

Jabarkan $(3x-2)^3$.

<u>Penyelesaian:</u>

Misalkan $a = 1$ dan $b = 1$, maka:

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} 1^r$$

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$$

Latihan Soal:

1. Berapa banyak susunan huruf yang bisa dibentuk dari kata “CONRESS” dengan syarat kedua huruf S tidak boleh bersebelahan.
2. Terdapat 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi. Tentukan banyak cara penyusunan seluruh buku dalam satu baris dengan syarat berikut:
   A. Semua buku yang bertopik sama letaknya bersebelahan satu sama lain.
   B. Urutan penyusunan buku tidak dibatasi (bebas, tanpa syarat khusus).
3. Dalam ujian akhir mata kuliaah *Teori Peluang* terdapat 10 soal. Setiap soal diberi nilai berupa bilangan bulat, dan total nilai selurug soal harus 100 poin. Jika setiap soal memiliki nilai maksimum 5 poin, berapa banyak cara pemberian nilai yang mungkin? (Tuliskan jawaban akhir dalam bentuk kombinasi $C(a, b)$, tidak perlu dihitung nilainya).

4. Dari sejumlah besar permen rasa stroberi, anggur, jeruk, dan melon, berapa banyak cara lima permen dapat diambil jika rasa boleh berulang?
5. Perlihatkan bahwa $\sum_{k=0}^{n} 2^k . \binom{n}{k} = 3^n$

BAB 3

PELUANG

3.1. Pendahuluan

Dalam konteks kehidupan sehari-hari, kita setiap hari dihadapkan pada ketidakpastian. Apakah akan cerah hari ini atau hujan? Berapa kemungkinan seorang pelanggan akan mengajukan klaim asuransi? Semua pertanyaan ini berkaitan dengan fenomena yang tidak dapat dipastikan hasilnya secara mutlak, tetapi dapat dianalisis menggunakan konsep peluang.

Peluang atau probabilitas adalah salah satu cabang dalam matematika yang membahas tentang kemungkinan terjadinya suatu peristiwa di dalam situasi yang penuh ketidakpastian. Meskipun tidak dapat diramalkan peristiwa secara pasti, teori peluang menyediakan kerangka logis dan kuantitatif untuk menilai seberapa besar kemungkinan suatu peristiwa terjadi.

Bab ini akan membahas konsep dasar teori peluang secara sistematis, dimulai dari pengenalan ruang sampel dan kejadian. Secara historis, teori peluang berkembang dari permasalahan dalam permainan judi, sehingga dalam pembelajaran ini akan banyak digunakan contoh-contoh yang melibatkan alat permainan seperti uang logam, dadu, kartu bridge, dan sejenisnya.

3.2. Ruang Sampel dan Kejadian

Langkah awal yang perlu dipahami dalam mempelajari teori peluang adalah konsep ruang sampel. Ruang sampel, disimbolkan dengan huruf S, adalah kumpulan semua kemungkinan hasil yang dapat muncul dari suatu percobaan acak. Dengan kata lain, ruang sampel adalah dasar dari analisis probabilistik karena mencerminkan semua kemungkinan yang dapat diamati dari sebuah proses percobaan.

peluang yang tidak akurat. Oleh karena itu, sebelum menentukan probabilitas suatu kejadian, penentuan ruang sampel harus dilakukan dengan cermat dan menyeluruh.

Definisi 3.2.

- Ruang sampel adalah kumpulan seluruh kemungkinan hasil yang dapat terjadi dalam suatu percobaan acak.
- Setiap subset dari ruang sampel S disebut sebagai suatu kejadian.

Contoh 3.2.

1. Suatu percobaan memilih satu hari secara acak dari satu minggu. Ruang sampel $S = \{Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu, Minggu\}$ dengan banyaknya ruang sampel yaitu $n(S) = 7$.
2. Suatu percobaan memilih satu kata acak dari kata "PROBABILITAS". Ruang sampel $S = \{P, R, O, B, A, I, L, T, S\}$. Banyaknya ruang sampel $n(S) = 9$.

3. Suatu percobaan mengambil satu angka acak dari 1 sampai 100. Ruang sampel $S = \{1,2,\dots,100\}$ dengan banyaknya ruang sampel $n(S) = 100$.

3.3. Peluang suatu Kejadian

Suatu ruang sampel dikatakan sebagai ruang sampel berpeluang sama apabila setiap titik sampelnya memiliki kesempatan yang sama untuk terjadi. Dalam hal ini, tidak ada satu pun titik sampel yang lebih mungkin terjadi dibandingkan titik sampel lainnya. Jika ruang sampel tersebut terdiri atas nnn titik sampel dan semuanya berpeluang sama, maka peluang munculnya setiap titik sampel adalah sebesar $\frac{1}{n}$.

Sebagai akibatnya, apabila terdapat suatu kejadian E yang mencakup k buah titik sampel, maka peluang terjadinya kejadian tersebut dapat dihitung dengan rumus:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{k}{n}$$

Dengan demikian, peluang munculnya mata dadu genap bersamaan dengan sisi angka pada koin adalah $\mathbb{P}(M) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

3.4. Kaidah pada Peluang

Dalam banyak situasi, menghitung peluang suatu kejadian akan lebih mudah jika kita mengaitkannya dengan peluang dari kejadian lain. Hal ini terutama berlaku ketika kejadian tersebut merupakan gabungan dari dua atau lebih kejadian, atau merupakan komplemen dari kejadian lain. Untuk mempermudah proses perhitungan, beberapa hukum dasar peluang dapat digunakan. Beberapa hukum penting tersebut akan dijelaskan pada bagian berikut karena sangat berguna dalam menyederhanakan berbagai bentuk perhitungan peluang.

Kaidah 3.4.1. Kaidah penjumlahan

Misalkan A dan B merupakan dua kejadian sembarang, maka

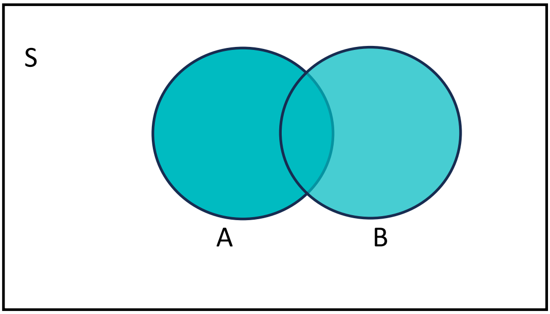
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Kaidah 3.4.2. Penjumlahan saling lepas

Misalkan A dan B saling terpisah, maka

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Berdasarkan diagram Venn, $\mathbb{P}(A \cup B)$ merupakan total peluang dalam $A \cup B$. Jika kita jumlahkan $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, maka peluang pada $A \cap B$ dihitung dua kali, oleh karena itu maka harus mengurangkan peluang $\mathbb{P}(A \cap B)$ ini sekali.



Berdasarkan kaidah di atas, jika terdapat $C_1, C_2, \dots, C_n$ maka

$$\mathbb{P}(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) = \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + \cdots + \mathbb{P}(C_n).$$

Contoh 3.4.1.

Peluang seorang mahasiswa untuk lulus mata kuliah logika matematika adalah $\frac{2}{3}$, sedangkan peluang untuk lulus mata kuliah statistika adalah $\frac{4}{9}$. Jika peluang mahasiswa tersebut lulus minimal salah satu dari kedua mata kuliah tersebut adalah $\frac{4}{5}$, berapakah peluang ia lulus kedua mata kuliah tersebut?

<u>Penyelesaian:</u>

Misalkan L adalah peristiwa atau kejadian "lulus mata kuliah logika matematika" dan T adalah kejadian "lulus mata kuliah statistika" maka

$$\mathbb{P}(L \cap T) = \mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(L + T)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45}$$

Kaidah 3.4.3. Penjumlahan dengan Komplemen

Misalkan Z dan Z' adalah dua kejadian yang satu merupakan komplemen lainnya, maka

$$\mathbb{P}(Z) + \mathbb{P}(Z') = 1.$$

Contoh 3.4.2.

Suatu percobaan pelemperan uang logam sebanyak 5 kali berturut-turut. Berapa peluang sekurang-kurangnya sisi gambar muncul sekali?

Penyelesaian:

Misalkan E adalah kejadian di mana setidaknya satu sisi gambar muncul. Banyaknya elemen dalam ruang sampel S adalah $n(S) = 2^5 = 32$ Misalkan E' adalah kejadian di mana tidak ada satu pun sisi gambar yang muncul. Kejadian ini hanya mungkin terjadi dalam satu cara, yaitu jika semua hasil pelemparan menunjukkan sisi angka. Maka, $\mathbb{P}(E') = \frac{1}{32}$ dan peluang munculnya setidaknya satu sisi gambar adalah $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E') = \frac{31}{32}$.

3.5. Peluang Bersyarat

Peluang suatu kejadian Z yang terjadi dengan syarat bahwa kejadian A sudah terjadi terlebih dahulu disebut sebagai **peluang bersyarat**, dan ditulis dengan notasi $\mathbb{P}(Z|A)$. Notasi ini dibaca sebagai "peluang Z terjadi jika A telah lebih dulu terjadi."

Definisi 3.5.

Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat Z bila A diketahui $\mathbb{P}(Z|A)$ didefinisikan sebagai

$$\mathbb{P}(Z|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap Z)}{\mathbb{P}(A)} \quad , \qquad \mathbb{P}(A) > 0.$$

Contoh 3.5.

Sebuah penerbangan memiliki peluang berangkat tepat waktu $\mathbb{P}(D) = 0{,}83$. Peluang bahwa penerbangan tersebut mendarat tepat waktu $\mathbb{P}(A) = 0{,}92$. Adapun peluang penerbangan itu berangkat dan mendarat tepat pada waktunya $\mathbb{P}(D \cap A) = 0{,}78$. Tenntukan peluang bahwa suatu pesawat mendarat pada waktunya jika diketahui pesawat tersebut berangkat tepat pada waktunya?

Kaidah 3.5 Kaidah Penggandaan Umum

Misalkan dalam suatu percobaan kejadian $A_1, \dots, A_k$ dapat terjadi, maka

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Adapun kaidah peluang total yaitu, misalkan $A_1, \dots, A_k$ untuk sembarang kejadian B yang merupakan bagian dari S berlaku

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k).$$

3.6 Kaidah Bayes

Dalam teori probabilitas, kita sering dihadapkan pada situasi di mana perlu menghitung peluang suatu kejadian dengan mempertimbangkan informasi dari kejadian lain yang sudah diketahui sebelumnya. Untuk itu, diperlukan pemahaman tentang peluang bersyarat dan kaidah penggandaan. Pemahaman ini akan mengantar kita pada Kaidah

Bayes, sebuah prinsip penting dalam memperbarui peluang ketika informasi baru tersedia.

Kaidah Bayes digunakan untuk membalik kondisi dalam peluang bersyarat, yaitu menghitung $\mathbb{P}(A|\mathrm{B})$ dari $\mathbb{P}(B|A)$.

Kaidah 3.6 Kaidah Bayes

Jika terdapat beberapa kejadian $A_1, \dots, A_n$ adalah sekatan dari ruang sampel, maka $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ maka

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}{\sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}(A|A_l) \cdot \mathbb{P}(A_l)}$$

Contoh 3.6.

Sebuah penyakit langka menyerang 1 dari 1000 orang. Tes medis tersedia dengan akurasi sebagai berikut: jika seseorang benar-benar sakit, tes akan positif dengan peluang 0,99. Jika seseorang sehat, hasil tes akan positif secara salah dengan peluang 0,02. Jika seseorang mendapatkan hasil tes positif, berapa peluang bahwa ia benar-benar sakit?

Penyelesaian:

Misalkan Z adalah seseorang sakit dan X adalah tes positif. $\mathbb{P}(Z) = 0{,}001$; $\mathbb{P}(Z^C) = 0{,}999$. $\mathbb{P}(X|Z) = 0{,}99$; $\mathbb{P}(X|Z^C) = 0{,}02$. Menggunakan kaidah Bayes

$$\mathbb{P}(Z|X) = \frac{\mathbb{P}(X|Z) \cdot \mathbb{P}(Z)}{\mathbb{P}(X|Z) \cdot \mathbb{P}(Z) + \mathbb{P}(X|Z^C) \cdot \mathbb{P}(Z^C)}$$

$$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}02 \cdot 0{,}999} = 0{,}047$$

Jadi, meskipun tesnya positif, peluang orang itu benar-benar sakit hanya sekitar 4,72%.

Latihan Soal:

1. Sebuah kotak berisi 5 bola hijau dan 3 bola magenta. Dua bola diambil secara acak satu per satu tanpa dikembalikan. Hitunglah peluang:
   a. Kedua bola yang diambil berwarna hijau.
   b. Bola pertama terambil warna hijau, dan bola kedua terambil warna magenta.
2. Di sebuah kelas terdapat 20 siswa, 8 siswa menggunakan kacamata. Jika satu siswa dipilih secara acak, berapakah peluang jika siswa yang dipilih tidak menggunakan kacamata?
3. Dalam suatu tes, diketahui bahwa 70% peserta belajar sebelum ujian dan 90% dari mereka lulus. Sedangkan dari peserta yang tidak belajar, hanya 40% yang lulus. Jika seseorang dipilih acak dari yang lulus, berapa peluang bahwa orang tersebut belajar sebelum ujian?
4. Sebuah perusahaan memiliki tiga pabrik yang memproduksi barang yang sama:
   a. Pabrik A memproduksi 50% dari total barang, dan 2% dari barangnya cacat.

b. Pabrik B memproduksi 30% dari total barang, dan 3% dari barangnya cacat.
c. Pabrik C memproduksi 20% dari total barang, dan 5% dari barangnya cacat.

Sebuah produk dipilih secara acak dari gudang, dan ternyata barang tersebut cacat. Berapakah peluang jika barang cacat tersebut berasal dari Pabrik C?

5. Dari sebuah dek kartu standar (52 kartu), dihitung peluang terambil kartu bernomor 10 atau berupa kartu As?

BAB 4

PEUBAH ACAK DISKRIT

4.1. Pendahuluan

Dalam teori peluang, kita tidak hanya tertarik pada kemungkinan terjadinya suatu peristiwa, tetapi juga pada nilai-nilai numerik yang terkait dengan hasil dari suatu percobaan acak. Misalnya, saat melempar dua buah dadu, kita dapat menghitung jumlah mata dadu yang muncul. Nilai jumlah tersebut bersifat acak, tetapi dapat dianalisis secara sistematis. Inilah yang disebut sebagai peubah acak (*random variable*).

Peubah acak merupakan sebuah fungsi yang menghubungkan setiap elemen dalam ruang sampel dengan sebuah nilai berupa bilangan real. Dalam bab ini, kita akan memusatkan perhatian pada peubah acak diskrit, yaitu peubah acak yang nilainya terbatas atau tak terbatas namun dapat dihitung secara satu per satu. Contohnya meliputi jumlah anak dalam sebuah

Definisi. Peubah Acak Diskrit

Peubah acak diskrit merupakan peubah acak yang nilai-nilainya dapat dihitung atau disebutkan secara jelas satu per satu.

Contoh 4.2.1.

- Banyaknya angka yang muncul saat melempar koin sebanyak 3 kali.
- Banyaknya kendaraan yang melewati gerbang tol dalam satu menit.

Peubah acak diskrit memiliki karakteristik yaitu himpunan nilai yang mungkin (range) adalah terhingga atau tak hingga dapat dihitung, memiliki fungsi massa peluang (pmf) yaitu:

$$f(y) = \mathbb{P}(Y = y) = p_i$$

dengan $\sum p_i = 1$ dan $0 \leq p_i \leq 1$.

Peubah acak diskrit juga memiliki karakteristik mempunyai fungsi distribusi. Fungsi distribusi atau fungsi distribusi kumulatif yaitu suatu fungsi bernilai real pada daerah nilai (range) X sehingga

$$F(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$$

untuk setiap nilai y pada daerah nilai Y, dengan $0 \leq F(y) \leq 1$.

Contoh 4.2.2.

Dua uang logam dilemparkan bersama-sama. Y menyatakan kejadian banyaknya angka muncul. Tentukan fungsi peluang dan fungsi distribusinya?

<u>Penyelesaian:</u>

$S = \{AA, AG, GA, GG\}$ sehingga $Y(S) = \{0,1,2\}$ dengan sebaran fungsi peluangnya adalah $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}$.

Sedangkan untuk fungsi distribusinya,

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

Bila X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, sebarang fungsi peluang bersamanya dapat dinyatakan sebagai fungsi $f(x, y)$ untuk sembarang pasangan nilai (x, y) yang dapat diambil dari peubah acak X dan Y

$$f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Contoh 4.2.3.

Misalkan dilakukan percobaan pelemparan sebuah dadu

X: 1 jika angka genap muncul, 0 jika ganjil.

Y: Nilai 1 jika angka yang muncul lebih dari 3, 0 jika tidak.

Tentukan fungsi peluang bersamanya.

Penyelesaian:

Untuk membantu menjawab pertanyaan di atas akan dibuat tabel percobaan kejadian X dan Y di bawah ini:

Angka Dadu	X	Y
1	0	0
2	1	0
3	0	0
4	1	1
5	0	1
6	1	1

Berdasarkan tabel di atas, fungsi peluang bersamanya

$$f(X = 0, Y = 0) = \frac{2}{6}$$

$$f(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$f(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{6}$$

$$f(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{6}$$

Nilai harapan dapat ditafsirkan sebagai rata-rata teoritis dari percobaan yang dilakukan dalam jumlah sangat besar.

4.3.2 Variansi

Definisi 4.3.2.

Variansi mengukur seberapa besar penyebaran nilai-nilai peubah acak terhadap nilai harapannya.

$$Var(Y) = \mathbb{E}\left[\left(Y - \mathbb{E}(Y)\right)^2\right] = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

Dengan

$$\mathbb{E}(Y^2) = y\sum_{i}^{2} y_i^2 \cdot p_i$$

Simpangan baku (standar deviasi) adalah akar kuadrat dari variansi:

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$$

Contoh 4.3.

Seseorang memainkan permainan melempar dadu enam sisi, dan menerima uang sesuai angka yang muncul. Misalkan peubah acak Y menyatakan jumlah uang yang diterima dalam ribuan rupiah (misalnya jika muncul angka 5, maka pemain mendapat $Rp\,5000$). Peluang munculnya masing-masing angka adalah sama. Tentukan nilai harapan dan variansinya?

Penyelesaian:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{6} y \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{y=1}^{6} y^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1^2+2^2+\cdots+6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

$$Var(Y) = \frac{91}{6} - (3,5)^2 = 2,92$$

Sehingga nilai harapannya adalah $Rp\,3500$ dan variansinya adalah $Rp\ 2920$.

4.4. Distribusi Peubah Acak Diskrit

4.4.1. Distribusi Binomial

Suatu percobaan dikatakan mempunyai peluang keberhasilan p dan peluang kegagalan $q =$

$1-p$ maka disebut peubah acak distribusi binomial. Adapun fungsi peluang dari distribusi binomial yaitu

$$f(y;n,p)=\binom{n}{y}p^{y}q^{n-y}, \qquad y=0,1,2,\dots,n$$

Contoh 4.4.1.

Tentukan peluang mendapatkan tepat tiga bilangan 2 bila sebuah dadu dilemparkan 5 kali.

<u>Penyelesaian:</u>

Peluang keberhasilan setiap percobaan adalah $\frac{1}{6}$ dan peluang kegagalan $\frac{5}{6}$, dalam hal ini munculnya bilangan 2 dianggap keberhasilan.

$$f\left(3;5,\frac{1}{6}\right)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$$

$$=\frac{5!}{3!\,2!}\cdot\frac{5^2}{6^5}=0{,}032.$$

4.4.2. Distribusi Multinom

Bila setiap percobaan menghasilkan salah satu dari k hasil percobaan $E_1,E_2,\dots,E_k$, dengan peluang $p_1,p_2,\dots,p_k$maka sebaran peluang bagi peubah acak

$Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ yang menyatakan berapa kali E_1, E_2, … , E_k terjadi dalam n percobaan yang bebas

$$f(y_1, \dots, y_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{y_1, \dots, y_k} p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}$$

dengan $\sum_{i=1}^{k} y_i = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Contoh 4.4.2.

Suatu percobaan pelemparan dua dadu sebanyak enam kali, tentukan peluang mendapatkan jumlah bilangan yang muncul sebesar 7 atau 11 sebanyak dua kali, kedua dadu menunjukan angka yang sama sebanyak satu kali, dan kemungkinan lainnya sebanyak 3 kali?

Penyelesaian:

E_1: terjadi total 7 atau 11

E_2: muncul bilangan yang sama pada kedua dadu

E_3: kemungkinan lainnya selain dua di atas

Dalam setiap pelemparan, peluang masing-masing kejadian di atas adalah $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, dan $p_3 = \frac{11}{18}$.

Contoh 4.4.3.

Selama musim hujan, rata-rata jumlah hari sekolah ditutup dikarenakan badai adalah 4 hari. Berapa peluang penutupan bahwa sekolah-sekolah ini akan ditutup selama 6 hari selama musim hujan?

<u>Penyelesaian:</u>

Menggunakan distribusi Poisson dengan $y = 6$ dan $\mu = 4$, diperoleh

$$f(6; 4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = 0{,}1042.$$

4.4.4. Distribusi Geometri

Distribusi geometri yaitu banyaknya percobaan sampai muncul keberhasilan yang pertama jika diketahui suatu percobaan bebas yang dilakukan secara berulang-ulang dapat menghasilkan keberhasilan dengan peluang p dan kegagalan dengan peluang $q = 1 - p$.

$$f(y; p) = pq^{y-1}, y = 1,2,3,$$

Contoh 4.4.4.

Tentukan peluang bahwa seseorang membutuhkan 4 kali pelemparan uang logam hingga sisi gambar muncul untuk pertama kalinya.

Penyelesaian:

Menggunakan distribusi geometri dengan $y = 4$ dan $p = \frac{1}{2}$, akan diperoleh

$$f\left(4; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

4.4.5. Distribusi Negatif Binomial

Distribusi Negatif Binomial adalah suatu percobaan untuk mendapatkan kejadian k keberhasilan jika dilakukan suatu percobaan yang berulang dengan peluang keberhasilan p dan peluang kegagalan $q = 1 - p$.

$$f(y; k, p) = \binom{y-1}{k-1} p^k q^{y-k}, \quad y = k, k+1, k+2, \ldots$$

Contoh 4.4.5.

Tentukan peluang seseorang melemparkan 3 koin uang logam dan mendapatkan semua sisi gambar atau semua sisi angka untuk yang kedua kalinya tepat pada pelemparan kelima?

Penyelesaian:

Menggunakan distribusi negatif binomial didapatkan

$$\begin{aligned} f\left(5;2,\frac{1}{4}\right) &= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= \frac{4!}{1!\,3!}\cdot\left(\frac{3^3}{4^5}\right) \\ &= \frac{37}{256} \end{aligned}$$

Latihan Soal:

1. Pemain basket memiliki peluang memasukkan bola basket ke dalam ring sebesar 0,7 dalam satu percobaan tembakan. Jika ia melakukan 10 tembakan secara independen, tentukan:
   a. Peluang bahwa tepat 7 tembakan berhasil masuk.
   b. Nilai harapan (mean) dan varians dari jumlah tembakan yang masuk.
2. Seseorang melempar sebuah koin hingga muncul sisi angka (A) untuk pertama kali. Misalkan peluang muncul angka adalah 0,4. Tentukan:
   a. Peluang bahwa angka muncul pertama kali pada lemparan ke-4.
   b. Nilai harapan dari banyaknya lemparan hingga angka pertama kali muncul.
3. Sebuah pusat layanan menerima rata-rata 3 panggilan telepon per menit. Asumsikan jumlah panggilan mengikuti distribusi Poisson. Hitung:

a. Peluang tidak ada panggilan dalam satu menit.
b. Peluang ada lebih dari 2 panggilan dalam satu menit.

4. Seorang sales melakukan panggilan telepon ke calon pelanggan. Peluang berhasil mendapatkan satu kesepakatan dalam satu panggilan adalah 0,2. Tentukan:
   a. Peluang bahwa kesepakatan ke-3 diperoleh pada panggilan ke-8.
   b. Nilai harapan banyaknya panggilan yang diperlukan untuk memperoleh 3 kesepakatan.
5. Dalam suatu survei, responden diminta memilih satu dari tiga minuman favorit: teh, kopi, atau jus. Diketahui peluang seseorang memilih teh = 0,3, kopi = 0,5, dan jus = 0,2. Jika 6 orang dipilih secara acak dan independen, berapakah:

a. Peluang bahwa 2 orang memilih teh, 3 orang memilih kopi, dan 1 orang memilih jus?
b. Nilai harapan jumlah orang yang memilih teh?

BAB 5

PEUBAH ACAK KONTINU

5.1. Pendahuluan

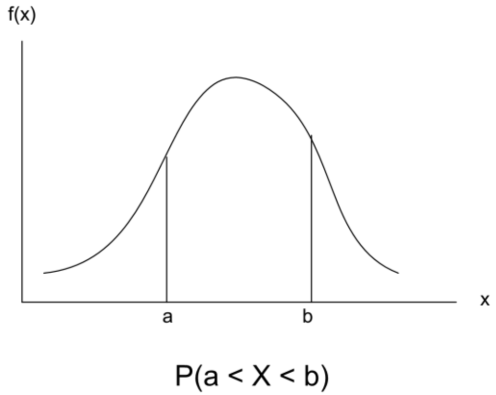
Sebelumnya, telah dibahas distribusi peubah acak diskrit yang digunakan untuk memodelkan kejadian acak yang memiliki jumlah kemungkinan terbatas atau dapat dihitung. Namun, dalam banyak kasus di dunia nyata, peubah acak tidak bersifat diskrit, melainkan kontinu, artinya dapat mengambil nilai dari suatu interval tak terhingga dalam himpunan bilangan real.

Distribusi peubah acak kontinu adalah distribusi dari suatu peubah acak yang nilainya berada dalam suatu rentang atau interval yang kontinu. Contoh nyata dari peubah acak kontinu di antaranya adalah waktu tunggu klaim, durasi hidup seseorang, besar kerugian akibat bencana, dan sebagainya. Karena nilai-nilainya tidak dapat dihitung satu per satu seperti pada distribusi diskrit, maka pendekatan yang

Definisi 5.1.

Fungsi kepadatan peluang peubah acak X kontinu harus memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ untuk setiap $a, b \in R$



Gambar 5.1. Fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu

Berdasarkan Gambar 5.1., diketahui bahwa peubah acak kontinu memiliki nilai peluang nol pada setiap titik x, tetapi lebih besar dari 0 untuk X yang terletak dalam sebuah selang (interval).

Contoh 5.1.

Jika diketahui suatu fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x; & 0 < x < 1 \\ 0; & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Buktikan bahwa $f(x)$ adalah suatu fungsi kepadatan peluang! Jika benar, hitunglah nilai $P\left(x < \frac{1}{2}\right)$!

Penyelesaian:

Perlu dibuktikan bahwa fungsi tersebut adalah suatu pdf, dengan melihat sifat suatu fungsi yang dapat disebut sebagai pdf yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} 2xdx$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = x^2|_0^1$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = 1^2 - 0^2 = 1$$

Karena $\int_0^1 f(x)dx = 1$ maka fungsi di atas merupakan suatu fungsi kepadatan peluang (pdf) dari peubah acak kontinu. Selanjutnya akan dihitung $P\left(x < \frac{1}{2}\right)$ sebagai berikut:

$$P\left(x < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx$$

$$P\left(x < \frac{1}{2}\right) = x^2 |_0^{\frac{1}{2}}$$

$$P\left(x < \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}$$

5.2. Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

Definisi 5.2.

$f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari peubah acak X kontinu. Fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*/cdf) $F(x)$ didefinisikan sebagai:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \ untuk - \infty < x < \infty}$$

$f(t)$ adalah nilai dari fungsi kepadatan peluang dari X di t.

Penyelesaian:

Fungsi kepadatan peluang diperoleh dari turunan pertama fungsi distribusi kumulatif:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Maka didapatkan:

$$F(x) = \frac{x^2}{4}, 0 \leq x \leq 2$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$f(x) = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

Untuk $x < 0$ dan $x > 2$ karena $F(x)$ konstan, maka $f(x) = 0$

Sehingga, fungsi kepadatan peluang adalah:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Secara khusus, jika X peubah acak kontinu, maka:

1. $P(a < x < b) = P(a \leq x < b)$

   $P(a < x < b) = P(a < x \leq b)$

   $P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b)$

2. $P(x = k) = 0$, dengan k = konstanta
3. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

5.3. Nilai Harapan dan Variansi dari Peubah Acak Kontinu

Perhitungan nilai harapan dari peubah acak kontinu sama dengan peubah acak diskrit, namun letak perbedaan keduanya yaitu peubah acak diskrit menggunakan operasi penjumlahan sedangkan peubah acak kontinu menggunakan operasi integral.

Definisi 5.3.

Jika peubah acak X kontinu dengan pdf $f(x)$, maka nilai harapan dari X dapat didefinisikan:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Contoh 5.3.

Diketahui suatu fungsi kepadatan peluang dari X kontinu sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad, & x \; yang \; lain \end{cases}$$

Berapa nilai b jika diketahui bahwa $E(X) = \frac{3}{4}$

Penyelesaian:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 x(bx^2)dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 (bx^3)dx = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}bx^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}b(1^4 - 0^4) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}b = \frac{3}{4}$$

$$b = 3$$

Sehingga fungsi kepadatan peluang dari X dapat dituliskan menjadi:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad , & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Momen pertama merupakan nilai harapan peubah acak X, mendeskripsikan letak pusat distribusi peluang. Hal ini tidak memberikan keterangan yang cukup jelas berkaitan dengan bentuk distribusi, sehingga diperlukan ukuran keragaman peubah acak yang dinamakan variansi. Variansi dari suatu peubah acak X disebut juga dengan variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dituliskan dengan $var(X)$ atau di simbolkan dengan σ_X^2atau hanya dengan σ^2.

Definisi 5.4.

Apabila X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ dan nilai harapan μ, maka variansi dari X adalah

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx$$

Rumusan ini dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2\end{aligned}$$

Akar positif dari variansi disebut simpangan baku atau standar deviasi.

Definisi 5.5.

Fungsi $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan peluang gabungan peubah acak kontinu X dan Y dengan syarat:

1. $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y)
2. $\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$
3. Untuk tiap daerah A di bidang xy,

$$P[(X,Y)\epsilon A] = \iint_A f(x,y)dxdy$$

Contoh 5.4.

Suatu fungsi kepadatan peluang gabungan peubah acak kontinu X dan Y berikut

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa syarat (2) dipenuhi!

Penyelesaian:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \iint_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x+3y)dxdy$$

$$\iint_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x+3y)dxdy = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(x^2+3xy)|_0^1 dy$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2}{5}[(1^2+3.1.y)-(0^2+3.0.y)]dy$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2}{5}[1+3y]dy$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2}{5} + \frac{6}{5} y dy$$

$$= \left(\frac{2}{5}y + \frac{3}{5}y^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{5}(1) + \frac{3}{5}(1)^2\right) - \left(\frac{2}{5}(0) + \frac{3}{5}(0)^2\right)$$

$$\iint_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x+3y)dxdy = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Dalam praktik aktuaria dan ekonomi, sering kali kita perlu memahami bagaimana suatu variabel memengaruhi risiko atau hasil secara individual, meskipun variabel tersebut berinteraksi dengan

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x + 3y)dy = \frac{4x + 3}{5}$$

untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $g(x) = 0$ untuk x yang lain

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x + 3y)dy$$
$$= \frac{2(1 + 3y)}{5}$$

untuk $0 \leq y \leq 1$ dan $h(y) = 0$ untuk x yang lain

5.4. Jenis Distribusi Peubah Acak Kontinu

Dalam konteks statistika dan aktuaria, pemahaman terhadap berbagai jenis distribusi kontinu sangat penting karena memiliki karakteristik dan penerapan tersendiri dalam analisis risiko, peramalan, dan pengambilan keputusan berbasis data.

5.6.1. Distribusi Uniform (Seragam)

Peubah acak X berdistribusi Uniform Kontinu pada interval (a, b), jika fungsi kepadatan peluang berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Sedangkan distribusi peluang kumulatifnya adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Nilai harapan dan variansinya adalah $E(X) = \frac{1}{2}(b + a)$ dan $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b - a)^2$

Contoh 5.6.

Lamanya penyewaan ruangan tidak lebih dari 4 jam. Diketahui X adalah peubah acak yang menyatakan waktu sewa, berdistribusi seragam.

a. Tentukan fungsi kepadatan peluang dari X!
b. Berapa peluang suatu pertemuan selama 3 jam atau lebih?

<u>Penyelesaian:</u>

a. $a = 0,\ b = 4$ sehingga

$$f(x, 0{,}4) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases}$$

b.

$$P(X \geq 3) = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x|_3^4 = \frac{1}{4}(4 - 3) = \frac{1}{4}$$

5.6.2. Distribusi Gamma

Secara umum, fungsi Gamma didefinisikan sebagai:

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx}$$

Fungsi Gamma $\Gamma(\alpha)$ adalah generalisasi dari pengertian faktorial dimana α adalah bilangan real positif, $\alpha > 0$.

Sifat dari distribusi Gamma adalah:

1. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0$
2. $\Gamma(\alpha + n) = (\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) \dots (\alpha)\Gamma(\alpha),\ x > 0$
3. $\Gamma(n) = (n - 1)!\,,\ \ n \in A$
4. $\Gamma(1) = 1$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Peubah acak kontinu X dengan distribusi Gamma dengan parameter α positif dan β negatif, jika fungsi kepadatan peluang berbentuk:

$$P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{5}^2 \Gamma(2)} x^{2-1} e^{-5x} dx$$

$$P(X \leq 1) = 25 \int_0^1 x e^{-5x} dx$$

$$P(X \leq 1) = \left[1 - e^{-5(1)}(1+5)\right] = 0{,}96$$

5.6.3. Distribusi Eksponensial

Peubah acak X berdistribusi Eksponensial jika fungsi kepadatan peluangnya:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & \beta > 0, x > 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Jika $\lambda = \frac{1}{\beta}$ maka $f(x) = \lambda e^{-x\lambda}$, $\lambda > 0, x > 0$ dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\beta}}$. Nilai harapan dan variansi dari distribusi eksponensial adalah $E(X) = \beta$ dan $\sigma_X^2 = \beta^2$.

Distribusi Eksponensial banyak digunakan dalam berbagai bidang. Contohnya adalah rentang waktu antar kedatangan pelanggan di fasilitas layanan (bank, loket pembayaran/kasir, dan sebagainya) dalam teori antrian memenuhi distribusi eksponensial. Pengujian keandalan mesin di industri manufaktur juga menggunakan distribusi eksponensial dalam hal menganalisis lama waktu penggunaan suku cadang dan alat listrik sejak digunakan pertama kali sampai terjadinya kerusakan.

Contoh 5.8.

Lamanya usia jenis komponen listrik berdistribusi Eksponensial dengan rata-rata 100 jam. Tentukan Berapakah peluang komponen tersebut dapat digunakan 50 jam lagi dari batas yang ditentukan Perusahaan?

<u>**Penyelesaian:**</u>

X : masa pakai komponen (dalam jam)

$$X \sim Eksponensial\ (\lambda)$$

$$E(X) = \beta = 100\ \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

$$P(X > 50) = 1 - F(50)$$

Fungsi distribusi kumulatif eksponensial adalah $F(x) = 1 - e^{-x\lambda} \Rightarrow F(50) = 1 - e^{-0,5}$

Sehingga:

$$P(X > 50) = 1 - F(50)$$

$$P(X > 50) = 1 - (1 - e^{-0,5})$$

$$P(X > 50) = e^{-0,5} = 0,6065$$

Peluang komponen bertahan lebih dari 50 jam sebesar 0,6065 atau 60,65%

5.6.4. Distribusi Weibull

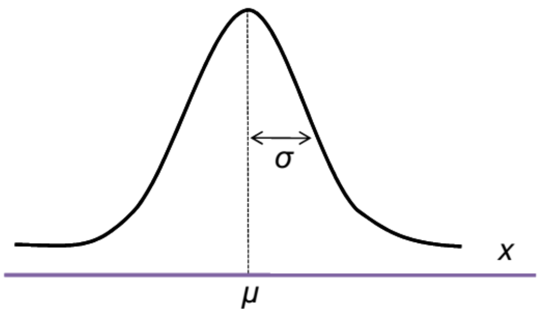
Penggunaan Distribusi Weibull sering kali berkaitan dengan penentuan keandalan jenis komponen tertentu, sama halnya dengan distribusi Gamma maupun distribusi Eksponensial. Peubah acak X berdistribusi Weibull jika fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}, & \alpha > 0 \;\; \beta > 0, x > 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi ini adalah $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$. Nilai harapan dan variansi dari distribusi Weibull adalah $E(X) = \alpha^{\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ dan $\sigma_X^2 = \alpha^{\frac{-2}{\beta}}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$.

5.6.5. Distribusi Normal

Distribusi normal juga dikenal dengan distribusi Gaussian yang memiliki 2 parameter. Beberapa permasalahan yang terkait dengan distribusi hampiran (*limited distribution*) dapat diselesaikan dengan distribusi ini. Salah satu teorema yang sering digunakan adalah teorema limit pusat (*Cental Limited Theorem*) yang menyatakan bahwa distribusi rata-rata sampel/contoh dari suatu populasi akan mendekati distribusi normal, tanpa melihat bentuk distribusi populasi aslinya, asalkan ukuran sampel/contoh besar. Kurva distribusi normal berbentuk setangkup seperti lonceng sebagaimana Gambar 5.2.



Gambar 5.2. Kurva distribusi normal

Peubah acak X berdistribusi normal jika mempunyai fungsi kepadatan peluang dengan nilai harapan μ dan variansi σ_X^2 sebagai berikut:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

dalam hal ini $\pi = 3{,}14159 \ldots$ dan $e = 2{,}71828 \ldots$

Sifat dari distribusi Normal adalah:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_R f(x)dx = 1$

Selanjutnya, jika Z berdistribusi Normal baku dengan rata-rata $\mu = 0$ dan simpangan baku $\sigma = 1$

Nilai peluang ini didapatkan menggunakan tabel distribusi Normal dengan $P(Z \leq -2) = 0{,}0288$.

5.6.6. Distribusi Lognormal

Peubah acak kontinu X berdistribusi lognormal apabila peubah acak $Y = ln\,(X)$ berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ dimana fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \{\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-[ln\,(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)}, \qquad x \geq 0\ 0, \quad x < 0$$

Nilai harapan dan variansinya adalah $E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ dan $\sigma_X^2 = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

Contoh 5.10.

Misalkan X berdistribusi lognormal dengan parameter $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 4$. Tentukan peluang X antara 1 dan 12,1825!

Penyelesaian:

$X \sim Lognormal(0{,}4)$, peubah acak $Y = ln\,(X) \sim N(0{,}4)$

Sehingga,

$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = P(\ln(1) \leq \ln(X) \leq \ln(12{,}1825))$

$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = P(0 \leq Y \leq 2{,}50)$

Bentuk tersebut diubah ke bentuk Normal baku menjadi:

$$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = P\left(\frac{ln\,(X)\; - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{ln\,(X)\; - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = P\left(\frac{0-0}{2} \leq Z \leq \frac{2{,}50-0}{2}\right)$$

$$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = P(0 \leq Z \leq 1{,}25)$$

$$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = P(Z \leq 1{,}25) - P(Z \leq 0)$$

Karena $Z \sim N(0{,}1)$ maka dengan menggunakan tabel distribusi normal baku diperoleh:

$$P(1 \leq X \leq 12{,}1825) = 0{,}8944 - 0{,}5000 = 0{,}4944$$

Contoh 5.11.

Waktu yang dibutuhkan dalam penyelesaian masalah di Divisi Aktuaria berdistribusi lognormal dengan parameter μ dan σ^2. Berapa μ sehingga peluang seorang karyawan di divisi tersebut yang dipilih secara acak mampu memecahkan permasalahan dalam waktu 10 menit atau kurang adalah sebesar 95% ketika $\sigma^2 = 4$?

Penyelesaian:

X : Peubah acak atas waktu yang dibutuhkan untuk memecahkan masalah

$$X \sim Lognormal\ (\mu, 4)$$

$$P(X \leq 10) = 0,95$$

$$P(ln\ (X)\ \leq ln\ (10)\ ) = 0,95$$

$$P(ln\ (X)\ - \mu \leq ln\ (10) - \mu\ ) = 0,95$$

$$P\left(\frac{ln\ (X)\ - \mu}{2} \leq \frac{ln\ (10) - \mu}{2}\right) = 0,95$$

$$P\left(Z \leq \frac{ln\ (10) - \mu}{2}\right) = 0,95$$

dimana $Z \sim N(0,1)$ maka dapat menggunakan tabel distribusi normal baku/normal standar, diperoleh $Z_{0,05} = 1,65$. Sehingga,

$$\frac{ln\ (10) - \mu}{2} = 1,65$$

$$\mu = ln\ ln\ (10) - 2\ (1,65) = 2,3025 - 3,300 = -0,9975$$

DAFTAR PUSTAKA

Azizah, F. N., & Nugraha, B. (n.d.). *Pengantar STATISTIKA INDUSTRI: Pengenalan Teori Dasar Probabilitas.* Jejak Pustaka.

Dr.rer.nat. Wayan Somayasa, S. (n.d.). *Pengantar Teori Peluang dan Statistika Matematika.* Deepublish.

Julie, H., Apriani, M. S., & Krisnamurti, C. N. (2017). *Buku Ajar Teori Peluang*. Sanata Dharma University Press.

Medhi, J. (1992). *Statistical Methods: An Introductory Text.* New Age Internasional.

Ross, S. (2014). *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Fifth Edition. California, USA: Elsevier.

Rumsey, D. J. (2006). *Probality for Dummies.* John Wiley & Sons.

Sumarmining, E., & Astutik, S. (2021). *Pengantar Teori Peluang.* Universitas Brawijaya Press.

Walpole, R. E., & Myers, R. H. (1989). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Macmillan Collage.

Walpole, R.E., et al. (2012). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. Ninth Edition. Prentice Hall.